M10

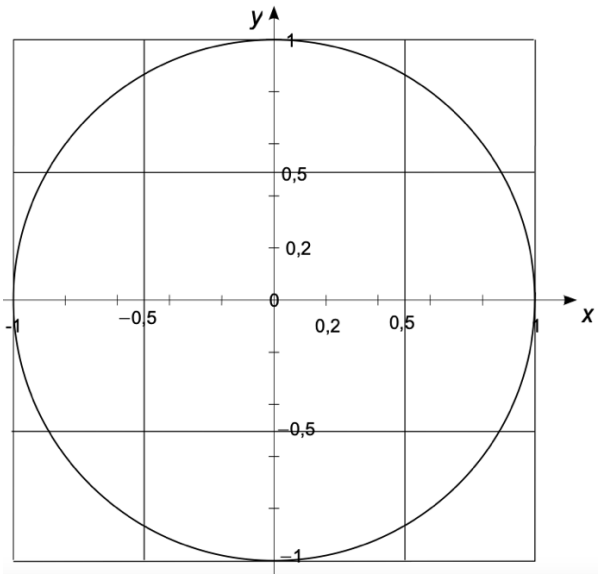
Trigonometrische Funktionen
Sinus und Kosinus am Einheitskreis

Ein scheinbarer Widerspruch

Der Taschenrechner liefert Sinus-, Kosinus- und Tangenswerte für beliebige Winkel. Beispielsweise ist $cos120° = -0{,}5$. Nach unserer bisherigen Definition ist dies aus zweierlei Gründen nicht erklärbar:

1. Im rechtwinkligen Dreieck gibt es keine Winkel größer als 90°.
2. Da die Seitenlängen stets positiv sind, kann unmöglich ein negatives Seitenverhältnis hervorgehen.

Um die Taschenrechnerausgabe zu verstehen, betrachten wir einen (vergrößerten) Einheitskreis. In seinen Mittelpunkt legen wir ein Koordinatensystem:

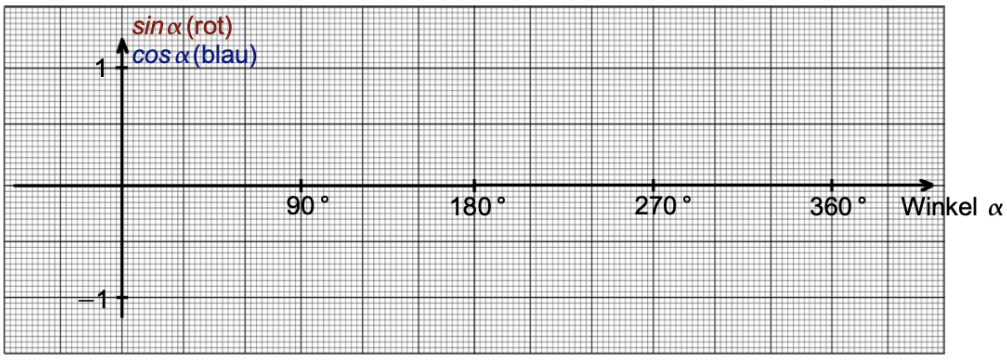


Aufgaben:

1. Zeichne im Koordinatenursprung unter 30° zur positiven x-Achse eine Halbgerade. Markiere $P_{30°}$ als Schnittpunkt mit der Kreislinie.
2. Wiederhole das Verfahren mit einem 120°-Winkel und konstruiere auf diese Weise den Punkt $P_{120°}$.
3. Finde den Zusammenhang zwischen dem obigen Schaubild und den TR-Werten für Sinus und Kosinus. Gibt es eine Übereinstimmung zur „alten“ Definition?
4. Formuliere eine eigene Definition für Sinus und Kosinus. Verwende dabei (u.a.) die Begriffe „Einheitskreis“, „Koordinatenursprung“, „Kreislinie“ und „Koordinate“.
5. Begründe anhand der Kreisskizze den so genannten ***trigonometrischen Pythagoras:***

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

Das Schaubild der Sinus- und Kosinusbeziehung

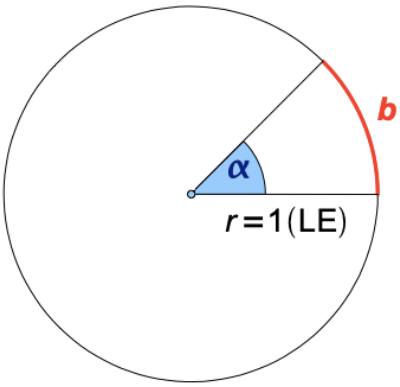


6. Markiere im 15°-Abstand auf der Kreislinie Punkte und berechne die zugehörigen Sinus- und Kosinuswerte. Trage die Ergebnisse für die zugehörigen Winkel im obigen Koordinatensystem ein. Zeichne mit den Messdaten die Sinuskurve (mit roter Farbe) sowie die Kosinuskurve (blau). Beschreibe den Verlauf der Kurven in eigenen Worten im Heft!

M10

Trigonometrische Funktionen
Das Bogenmaß

Was ist das Bogenmaß?



Das Bogenmaß ist eine alternative Größe zur Winkelmessung. Hiermit lassen sich Winkel ebenso exakt beschreiben, wie mit Gradangaben. Anstatt der Winkelgröße im Gradmaß verwenden wir beim Bogenmaß die Maßzahl der Länge des entsprechenden Kreisbogens *b* auf dem Einheitskreis.

Umrechnung Winkelmaß-Bogenmaß

Wir kennen bereits die Formel für den Kreisbogen:

$$b = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{360°}$$

Da es sich um den Einheitskreis handelt, hat der Radius die Länge 1. Daraus folgt:

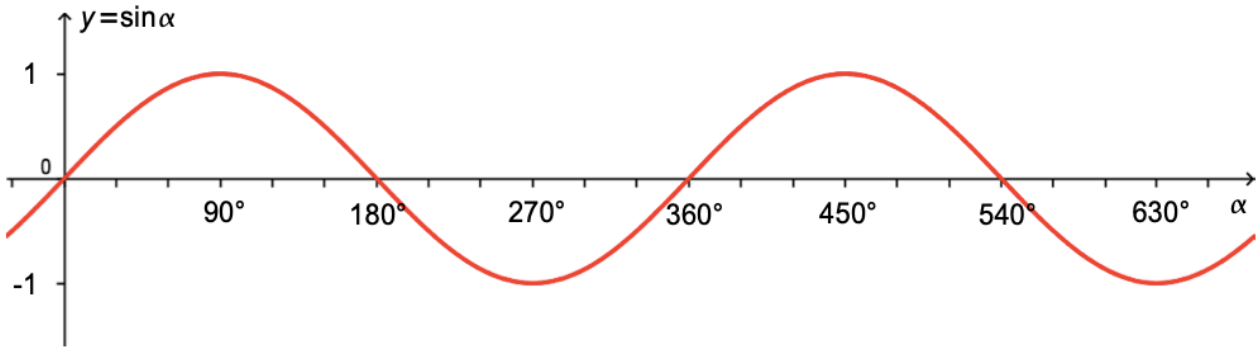
$$b = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360°}$$

Durch Umstellen der Formel, kann man nun auch in die andere Richtung umrechnen:

$$\alpha = 360° \cdot \frac{b}{2\pi}$$

Wofür braucht man das Bogenmaß?

Wir wissen, dass beispielsweise Sinus jedem Winkel α genau einen Wert zwischen -1 und 1 zuordnet. Wenn wir die Sinuswerte über den entsprechenden Winkeln auftragen, erhalten wir das folgende Schaubild:



Gewöhnlich werden auf der x-Achse aber keine (Winkel-)Größen, sondern nur die entsprechenden Maßzahlen aufgetragen. Daher wird in der Regel bei den Winkelfunktionen das ***Bogenmaß*** verwendet. (Hier gibt es keine Einheit und die Zahlenwerte auf der Rechtsachse sind „handlich“ klein.)

Wenn wir das Bogenmaß verwenden, schreiben wir künftig $\sin x$ (anstatt $\sin \alpha$). Analog natürlich auch $\cos x$ bzw. $\tan x$.

Aufgaben:

1. Wandle die Winkelgrößen um ins Bogenmaß und notiere die Werte am obigen Diagramm. (Runde deine Zahlen dabei nicht, sondern notiere sie mit π).
2. Zeichne die Sinus- und Cosinusfunktion auf einen extra Zettel im Bogenmaß in ein gemeinsames Koordinatensystem. (Tipp: Runde hierfür π auf 3.)